Erzwungene Schwingungen (M9)

Ziel des Versuches

In diesem Versuch werden freie, freie gedämpfte und erzwungene Schwingungen am Drehpendel untersucht. Die Resonanzkurven sowie das Phasenverhalten zwischen Erreger und schwingendem System werden bei unterschiedlichen Dämpfungen aufgezeichnet.

Theoretischer Hintergrund

Die Differenzialgleichung (homogene, lineare DGL 2. Ordnung) für die freie ungedämpfte harmonische Schwingung (lineares Kraftgesetz!) eines Drehpendels

$$J \frac{d^2\psi}{dt^2} + D\psi = 0 \tag{1}$$

J: Trägheitmoment des Systems um die Drehachse, D: Richtgröße der Spiralfeder

hat die allgemeine Lösung

$$\psi = \alpha \exp(i\omega_0 t) + \beta \exp(-i\omega_0 t) \tag{2}$$

mit der Eigenfrequenz ω_0 bzw. f_0 und der Schwingungsdauer

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad . \tag{3}$$

Die Differenzialgleichung für die gedämpfte harmonische Schwingung des Drehpendels

$$J \frac{d^2\psi}{dt^2} + B\frac{d\psi}{dt} + D\psi = 0 \tag{4}$$

$B\, d\psi/dt$ Drehmoment der Wirbelstrombremse

hat die allgemeine Lösung

$$\psi = \exp(-\frac{B}{2J}\, t) \left[\alpha \exp \sqrt{\frac{B^2}{4J^2} - \frac{D}{J}}\, t + \beta \exp - \sqrt{\frac{B^2}{4J^2} - \frac{D}{J}}\, t \right] \quad . \tag{5}$$

Für den Fall schwacher Dämpfung $B^2 \leq 4DJ$ (und auch nur genau dann) ergibt sich:

$$\psi = \exp(-\frac{B}{2J}\, t)\, [\alpha \exp(i\omega_1 t) + \beta \exp(-i\omega_1 t)] \tag{6}$$

mit der Eigenfrequenz

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{D}{J} - \frac{B^2}{4J^2}} \quad . \tag{7}$$

Die Amplitude nimmt um den Faktor $\exp(-\frac{B}{2J}\,t)$ exponentiell mit der Zeit ab. Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplitudenwerte

$$\frac{\psi_n}{\psi_{n+1}} = \exp(+\frac{B}{2J}\,T_1) = \exp(\delta T_1) \tag{8}$$

ist das Dämpfungsverhältnis. Der natürliche Logarithmus dieses Verhältnisses heißt logarithmisches Dekrement

$$\Lambda = \ln\frac{\psi_n}{\psi_{n+1}} = \frac{B}{2J}\,T_1 = \delta T_1 \quad . \tag{9}$$

Abklingkonstante δ in 1/s

Die Differenzialgleichung (inhomogene, lineare DGL 2. Ordnung) für die erzwungene Schwingung des Drehpendels lautet

$$J\,\frac{d^2\psi}{dt^2} + B\frac{d\psi}{dt} + D\psi = M_0\cos\omega t \tag{10}$$

mit $M_0\cos\omega t$ als äußeres antreibendes Drehmoment infolge der periodischen Bewegung der Schubstange. Die Differenzialgleichung hat die partikuläre Lösung

$$\psi = \frac{M_0}{\sqrt{J^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + B^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi) \quad , \tag{11}$$

mit der Amplitude $A(\omega)$

$$A(\omega) = \frac{M_0}{\sqrt{J^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + B^2\omega^2}} \quad . \tag{12}$$

Die Phasenverschiebung φ ist gegeben durch

$$\tan\varphi = \frac{B\omega}{J(\omega_0^2-\omega^2)} \quad . \tag{13}$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch durch die Addition der partikulären Lösung und der Lösung der homogenen Differenzialgleichung zu

$$\psi(t) = \frac{M_0}{\sqrt{J^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + B^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi) + \exp(-\frac{B}{2J}\,t)\alpha\cos(\omega_1 t) \quad . \tag{14}$$

Man sieht, dass sich die Schwingungen des angetriebenen und des ungestörten Systems zu Schwebungen überlagern. Nach einer Einschwingzeit verschwindet der letzte Term in (14) mit der Eigenfrequenz ω_1 aufgrund der exponentiellen Dämpfung und das System schwingt schließlich mit der Erregerfrequenz ω, wobei Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung von der Differenz $\omega_0^2 - \omega^2$ abhängen. Die Amplitude erreicht im ungedämpften Fall (B $=$ 0) ein unendlich hohes Resonanzmaximum. Mit wachsender Dämpfung verschiebt sich das Maximum der Resonanzkurve zu kleineren Frequenzen. Die Phasendifferenz wächst vom Grenzwert Null für sehr langsame Schwingungen des Erregers $\omega \ll \omega_0$ über $\pi/2$ im Resonanzfall auf den Grenzwert π für sehr schnelle Schwingungen $\omega \gg \omega_0$.

Versuchsaufbau und -durchführung

Am Versuchsplatz finden Sie ein Drehpendel nach Pohl. Die Schwingung des Drehpendels kann mit Hilfe einer Wirbelstrombremse gedämpft werden. Die eingestellte Stromstärke sollte 1 A nicht überschreiten. Das Drehpendel kann mit Hilfe von Motor, Exzenter und Schubstange mit einer variierbaren Erregerfrequenz ω angetrieben werden. Über einen Sensor auf der Drehachse des Drehpendels wird ein zur Amplitude proportionales Spannungssignal erzeugt. Mittels eines weiteren Sensors wird zusätzlich der Schwingungsverlauf des periodischen Antriebs in ein Spannungssignal umgesetzt. Beide Signale können Sie über das CASSY-System (Eingang A und Eingang B) erfassen. Für die Bestimmung der Phasenlage sind beide Signale zu vergleichen.

siehe auch Versuch E8

Erwärmung!

Aufgabenstellung

1. Die Eigenfrequenz des nahezu ungedämpften Systems ω_0 ist zu bestimmen. Messungen sind über jeweils 10 Perioden bei 3 unterschiedlichen Anfangsauslenkungen auszuführen.

2. Freie gedämpfte Schwingungen sind über mindestens 10 Perioden für zwei unterschiedliche Dämpfungen aufzunehmen (empfohlen sind hierbei 0,2 A und 0,4 A als Stromstärke für die Wirbelstrombremse).

3. Für beide freien gedämpften Schwingungen sind die Phasendiagramme ($d\psi/dt$ über ψ) aufzunehmen.

4. Die logarithmischen Dekremente für beide gedämpften Schwingungen sind aus den Dämpfungsgeraden zu ermitteln. Dazu trägt man $\ln \psi_n$ über der Zeit t auf und ermittle den Anstieg.

Empfohlen wird die Auswertung mit CASSY oder DIADEM über die Peakanalyse

5. Die Resonanzkurven der Amplitude und die Abhängigkeit der Phasenlage von ω sind für die zwei Bremsstromstärken aufzunehmen. Dazu sind Schwingungen bei verschiedenen Erregerfrequenzen ω jeweils nach Abklingen des Einschwingvorgangs aufzuzeichnen. Empfohlen werden mindestens jeweils 6 verschiedene Erregerfrequenzen vor und hinter der Resonanzstelle. Messen Sie im Bereich der Resonanzstelle in engeren Intervallen. Aus der Auswertung dieser Messungen fertigen Sie dann die grafischen Darstellungen für die Resonanzkurven und den Phasenverlauf an. Empfohlen wird die Bestimmung der Phasenlage über Lissajous-Figuren.

Zeichnen Sie die Resonanzkurven unbedingt während der Versuchsdurchführung, z. B. auf Millimeterpapier, denn nur so können Sie erkennen, ob die Anzahl der Messpunkte im Bereich der Resonanz ausreicht.

6. Aus den Halbwertsbreiten der Resonanzkurven (HWB $= 2\,\Delta\omega$) sind die Dämpfungskonstanten δ zu bestimmen (es gilt $\Delta\omega \approx \delta\sqrt{3}$)[1] und mit den in Aufgabe 4 erhaltenen Dämpfungskonstanten zu vergleichen.

[1] Herleitung im Anhang

Anhang

Resonanzüberhöhung und Näherung für die Bandbreite (HWB) bei schwacher Dämpfung

Mit $\delta = B/2J$ aus (9) ergibt sich die Eigenfrequenz ω_1 für den Fall schwacher Dämpfung gemäß (7) zu

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Für die Amplitude (12) gilt:

$$A(\omega) = \frac{M_0}{J} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \tag{15}$$

Im statischen Grenzfall gilt für die Amplitude:

$$A(\omega = 0) = \frac{M_0}{J\omega_0^2}$$

Für die Resonanzamplitude gilt:

$$A(\omega_1) = \frac{M_0}{J} \frac{1}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \approx \frac{M_0}{J} \frac{1}{2\delta\omega_0} \tag{16}$$

Die Resonanzüberhöhung oder Güte wird definiert als:

$$Q = \frac{A(\omega_1)}{A(\omega = 0)} \approx \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Bei den Kreisfrequenzen $\omega_{\pm 1/2}$ sei die Resonanzamplitude jeweils beidseitig auf die Hälfte abgefallen:

$$\frac{A(\omega_1)}{2} = A(\omega_{\pm 1/2)}$$

Nach (16) und (15) gilt dementsprechend

$$\frac{1}{4\delta\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\pm 1/2}^2)^2 + 4\delta^2\omega_{\pm 1/2}^2}}$$

Setzt man für die halbe Halbwertsbreite $\Delta\omega = |\omega_0 - \omega_{\pm 1/2}|$ und vergleicht die Quadrate der Nenner in sehr grober Näherung, so folgt:

$$16\delta^2\omega_0^2 = [(\omega_0 - \omega_{\pm 1/2})(\omega_0 + \omega_{\pm 1/2})]^2 + 4\delta^2\omega_0^2 = 4\Delta\omega^2\omega_0^2 + 4\delta^2\omega_0^2$$

bzw. $\Delta\omega = \delta\sqrt{3}$.