

Das Maxwellsche Fallrad (M8)

Ziel des Versuches

Jeder kennt das Jo-Jo. Im Versuch wird dessen Physik untersucht. Der Gewichtsverlust des Rades, der sowohl beim Fallen als auch beim Aufsteigen auftritt, soll ermittelt werden.

Theoretischer Hintergrund

Ein rotationssymmetrischer Körper (Rad) der Masse m besitzt eine Spindel mit dem Durchmesser $2r$, auf der ein Faden aufgewickelt ist. Befestigt man den Faden und lässt man den Körper los, so rollt sich der Faden ab und der Körper wird beschleunigt. Ist der Faden bis zum Ende abgewickelt, so wickelt sich der Faden aufgrund der Trägheit des Rades wieder auf und das Rad steigt wieder bis zum Umkehrpunkt. Dieser Vorgang wiederholt sich.

Die Beschleunigung des Rades zum Zeitpunkt t ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz. Dieser lautet hier unter Vernachlässigung der Reibungsenergie:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}J_S\omega^2 \quad .$$

Dabei ist J_S das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Spindelachse des Rads. Zur Zeit $t = 0$ sei $x(t = 0) = x_0$ und $\dot{x}(t = 0) = 0$, sowie $\omega = 0$. Daraus folgt:

$$mg(x - x_0) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2 \quad .$$

Wegen des Abwickelns um den Radius r gilt $\omega = \frac{v}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$ und damit

$$mg(x - x_0) = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J_S}{r^2} \right) \cdot \dot{x}^2 \quad .$$

Differenzieren nach t liefert:

$$mg\dot{x} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J_S}{r^2} \right) \cdot 2\dot{x}\ddot{x} \quad .$$

Daraus folgt:

$$mg = \left(m + \frac{J_S}{r^2} \right) \cdot \ddot{x}$$

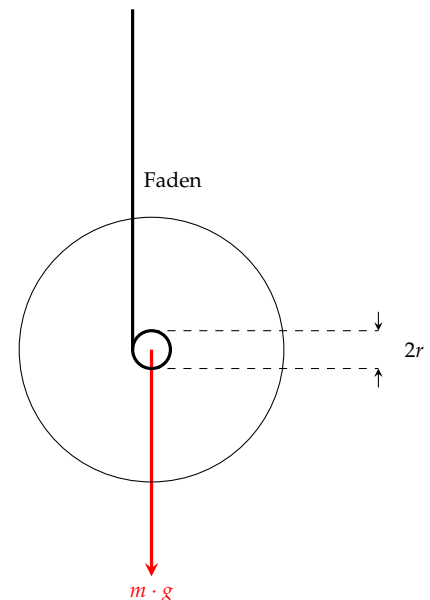


Abbildung 1: Prinzipskizze

und somit

$$\ddot{x} = \frac{m}{m + \frac{J_S}{r^2}} g \quad (1)$$

Die Beschleunigung des Maxwellschen Rades wird also wegen der Rotationsbewegung gegenüber dem freien Fall um den Faktor $m / (m + J_S/r^2)$ verkleinert.

Es ist zu beachten, dass beim Maxwellschen Rad die Rotationsachse nicht mit der Symmetrieachse übereinstimmt, sondern dass die Drehbewegung um die Punkte erfolgt, an denen der Faden die Spindel gerade berührt. Man kann die Beschleunigung, die das Rad erfährt, auch aus einer Betrachtung des Drehmomentes herleiten:

Ganz allgemein gilt für das Drehmoment

$$M = J\dot{\omega} \quad (2)$$

und für die Winkelbeschleunigung $\omega = \dot{x}/r$. Am Fallrad greift das Drehmoment $M = mgr$ an. Setzt man das Drehmoment in (2) ein und löst nach \ddot{x} auf, so lautet das Ergebnis:

$$\ddot{x} = mg \frac{r^2}{J}$$

Dieser Ausdruck kann in Gleichung (1) überführt werden, mit

$$J = J_S + mr^2$$

Während in die Herleitung über die Energieerhaltung nur das Trägheitsmoment um die Schwerpunktsachse des Rades J_S eingeht, muss bei der Betrachtung des Drehmomentes das Trägheitsmoment um die tatsächliche Rotationsachse J berücksichtigt werden. Die Größen J und J_S sind über den Steinerschen Satz miteinander verknüpft.

Versuchsaufbau und -durchführung

Die oberen Fadenenden des Maxwellschen Rades sind an einem waagrecht ausgerichteten Stativstab befestigt. In der Mitte des Stabes befindet sich ein DMS-Kraftsensor¹, der an einem fest mit dem Tisch verbundenen Gestell angebracht ist. Der Kraftsensor, dessen Signal mit Hilfe des CASSY-AD-Wandlers aufgezeichnet werden kann, misst die Gewichtskraft von Rad und Stativstange. Kompensiert man mit Hilfe der Software die Gewichtskraft von ruhendem Rad und Stange, so kann man die Änderung der Gewichtskraft des Rades bei seiner Auf- und Abwärtsbewegung mit dem PC aufzeichnen. Die Beschleunigung des Rades kann aus den durchfallenen Strecken $x(t)$ bestimmt werden. Dazu stehen Ihnen ein Maßstab und eine Stoppuhr zur Verfügung.

Das Trägheitsmoment des Rades beträgt $J_S = (12,5 \pm 0,3) \text{ kgcm}^2$, die Masse m ist auf dem Rad vermerkt.

¹ DMS bedeutet Dehnungsmessstreifen. Die Längen- und Querschnittsänderung bei Dehnung eines Drahtes führt zur Vergrößerung seines elektrischen Widerstands, die über eine Brückenschaltung gut gemessen werden kann. Eine ausführliche Beschreibung findet sich im Versuch DMS-Spannungswaage (E23).

Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie die Beschleunigung des Rades für verschiedene Fallstrecken x aus der Beziehung $x(t) = \frac{1}{2}at^2$. ²Vergleichen Sie Ihren a -Wert mit dem aus der Gl. (1) berechneten Wert.
2. Bestimmen Sie die Gewichtsänderung des Rades während seiner Auf- und Abwärtsbewegung. Berechnen Sie aus dem Gewichtsverlust die Beschleunigung des Rades und vergleichen Sie den Wert mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1 sowie dem theoretisch erwarteten Wert.

²Führen Sie dazu als Zwischenauswertung eine grafische Mittelung über sechs x -Werte bereits während des Versuches durch.