PHYSIKA Physikalische Praktika der Universität Bremen

4. Oktober 2017

Stoßgesetze in einer Dimension (M4)

Ziel des Versuches

Das Gesetz der Impulserhaltung soll beim fast-elastischen und beim unelastischen Stoß überprüft werden. Da sich hier die Körper nur in einer Dimension bewegen, müssen nur die Beträge betrachtet werden.

Theoretischer Hintergrund

Man unterscheidet zwischen verschiedenen Arten von Stößen und betrachtet neben den Impulsen auch die Energie.

Betrachtet wird der Zusammenstoß zweier Körper mit den Massen m_1 und m_2, die sich nur in einer Dimension ($(+x)$ oder $(-x)$ Richtung) bewegen können. Ihre Geschwindigkeiten seien vor dem Stoß v_1 und v_2 und nach dem Stoß v'_1 und v'_2.

Wegen der Eindimensionalität werden im Folgenden nur die Beträge der Geschwindigkeiten sowie die Ortsvektoren betrachtet. Die Richtung wird durch eine geeignete Wahl des Vorzeichens berücksichtigt: $(+)$ Zeichen für Geschwindigkeiten oder Ortsvektor in $(+x)$ Richtung und $(-)$ Zeichen für Geschwindigkeit oder Ortsvektor in $(-x)$ Richtung.

Die Konstanz der Geschwindigkeit des Massenschwerpunktes:

Nach dem Impulserhaltungssatz gilt :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad . \tag{1}$$

Die Koordinate des Massenmittelpunktes ist:

$$x_\mathrm{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad .$$

Die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes ist also vor dem Stoß:

$$v_\mathrm{M} = \frac{\mathrm{d}x_\mathrm{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad ,$$

und nach dem Stoß:

$$v'_\mathrm{M} = \frac{\mathrm{d}x'_\mathrm{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{m_1 v'_1 + m_2 v'_2}{m_1 + m_2} \quad .$$

Nach Gl. (1) ist also:

$$v'_\mathrm{M} = v_\mathrm{M} \quad . \tag{2}$$

D. h., unabhängig von der Art des Stoßes ist die Schwerpunktgeschwindigkeit vor und nach dem Stoß in Betrag und Richtung gleich.

Der elastische Stoß:

Beim elastischen Stoß wird neben dem Impuls auch die kinetische Energie erhalten. Es gilt :

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad . \tag{3}$$

Die Gleichungen (1) und (3) lassen sich als homogene Gleichungen in m_1 und m_2 umschreiben:

$$\begin{aligned} (v_1 - v_1') \cdot m_1 + (v_2 - v_2') \cdot m_2 &= 0 \\ (v_1^2 - v_1'^2) \cdot m_1 + (v_2^2 - v_2'^2) \cdot m_2 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Bedingung für die Lösung dieser Gleichungen ist das Verschwinden der Determinante der Koeffizienten.[1] Das liefert:

$$(v_1 - v_1')(v_2^2 - v_2'^2) = (v_2 - v_2')(v_1^2 - v_1'^2) \quad .$$

Da weder $v_1 - v_1'$ noch $v_2 - v_2'$ Null sein können (dies würde bedeuten, dass keine Wechselwirkung stattgefunden hat), ist:

$$v_2 + v_2' = v_1 + v_1'$$

oder

$$v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2) \quad . \tag{4}$$

Die Relativgeschwindigkeit bleibt also bei einem elastischen Stoß dem Betrag nach unverändert. Aus Gl. (1) und Gl. (4) erhält man explizite Lösungen für v_1' und v_2' :

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad . \end{aligned} \tag{5}$$

Der „fast-elastische Stoß“:

In der Realität wird der elastische Stoß natürlich nur gut angenähert; beim Zusammenprall von Massen tritt immer eine Verformung auf, die zu einem Verlust an kinetischer Energie führt. Dieser allgemeine Fall lässt sich wie folgt behandeln:

Die Relativgeschwindigkeit sei nach dem Stoß um den Faktor $(0 \le \varepsilon \le 1)$ kleiner, d. h., es gilt statt Gl. (4):

$$v_1' - v_2' = -\varepsilon \cdot (v_1 - v_2) \quad . \tag{6}$$

Die Lösungen für v_1' und v_2' sind:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - \varepsilon \cdot m_2)v_1 + (1+\varepsilon)m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{(m_2 - \varepsilon \cdot m_1)v_2 + (1+\varepsilon)m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

[1] $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = 0$

Der Parameter ε ist eine Materialkonstante, die über einen weiten Bereich unabhängig von der Relativgeschwindigkeit ist. Für $\varepsilon = 1$ folgt aus Gl. (7) die Gl. (5).

Der unelastische Stoß:

Beim unelastischen Stoß bleiben die beiden Körper nach dem Stoß zusammen, d. h., mit $\varepsilon = 0$ ergibt sich aus Gl. (6)

$$v_1' = v_2' = v' \quad . \tag{8}$$

Aus dem Impulserhaltungssatz folgt:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad .$$

Die kinetische Energie ist *vor* dem Stoß:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \quad ,$$

und *nach* dem Stoß:

$$E'_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1'^2 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \quad .$$

Der Verlust an kinetischer Energie ist daher:

$$E_{\text{kin}} - E'_{\text{kin}} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \quad . \tag{9}$$

Versuchsaufbau und -durchführung

Die beiden Körper sind zwei Wagen, die sich auf einer Fahrbahn bzw. Luftkissenschiene nahezu reibungsfrei bewegen können.

Die Geschwindigkeit der beiden Körper vor und nach dem Stoß werde mit Hilfe zweier Lichtschranken und elektronischer Stoppuhren bestimmt. Auf jedem Wagen befindet sich ein Metallreiter von 10 cm Länge. Durchfährt der Wagen eine Lichtschranke, so misst die Stoppuhr die Zeit, die die Lichtschranke unterbrochen ist. Aus der Strecke s und der Zeitanzeige der Uhr t lässt sich die Geschwindigkeit des Wagens bestimmen. Um „fast-elastische" Stöße mit messbaren ε-Werten zu erzielen, sind an den Seiten, mit denen die Wagen zusammenstoßen, Federn angebracht. Unelastische Stöße werden dadurch verwirklicht, dass die Wagen an der Kontaktstelle mit einem Material versehen werden, das die Wagen nach dem Stoß zusammenhält. Die Massen der Wagen können im Praktikum mit einer Waage bestimmt werden.

Aufgabenstellung

1. Die Konsequenzen der elastischen und „fast-elastischen" Stöße Gl. (5) und Gl. (7) lassen sich grafisch als Gerade darstellen, wenn m_1, m_2 und v_2 in der Messreihe konstant gehalten werden. Wählen Sie $v_2 = 0$, indem Sie einen Wagen festhalten, und bestimmen Sie v_1' und v_2' in Abhängigkeit von v_1 für unterschiedliche Wagenmassen m_1, m_2.[2] (Überprüfen Sie

[2] (2 Fälle: $m_1 = m_2$ und $m_1 \neq m_2$)

im Fall $m_1 = m_2$, ob Ihre Wagenmassen im Rahmen der Messfehler auch wirklich gleich sind!)
Lassen Sie dazu den Wagen (m_1) mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten v_1 auf den ruhenden Wagen (m_2) stoßen. Bestimmen Sie v_1, sowie die Geschwindigkeit v_1' und v_2' der Wagen nach dem Stoß mit Hilfe der Lichtschranken und der elektronischen Stoppuhren. Stellen Sie v_1' und v_2' in Abhängigkeit von v_1 geeignet grafisch dar und bestätigen Sie den in den Gln. (5) und (7) vorausgesagten Zusammenhang zwischen v_1', v_2' und v_1.

2. Weisen Sie nach, dass es sich bei den unter Aufgabe 1 durchgeführten Stößen um „fast-elastische" Stöße handelt. Bestimmen Sie dafür mit Gl. (6) ein mittleres ε aus Ihren Messwerten (achten Sie dabei auf die Vorzeichen der Geschwindigkeiten!). Bestimmen Sie mit diesem ε und Gl. (7) theoretische Werte für v_1' und v_2' und tragen Sie diese in Ihre grafische Darstellung von Aufgabe 1 mit ein.

3. Lassen Sie die unter Aufgabe 1 und 2 verwendeten Wagen unelastisch zusammenstoßen. Die beim unelastischen Stoß verzehrte kinetische Energie hängt nach Gl. (9) von v_1^2 $(v_2 = 0)$ ab. Berechnen Sie E_{kin} und E'_{kin} und tragen Sie $E_{\text{kin}} - E'_{\text{kin}}$ in Abhängigkeit von v_1^2 *per Hand* auf doppeltlogarithmischem Papier auf.[3]

4. Weisen Sie nach, dass sowohl beim „fast-elastischen" als auch beim unelastischen Stoß die Schwerpunktgeschwindigkeit nach Gl. (2) erhalten bleibt.

[3] Geeignetes Papier erhalten Sie bei Bedarf am Versuchstermin.