Physikalische Praktika der Universität Bremen

27.09.2022

Resonanzverhalten eines Masse-Feder Systems (M10)

Ziel des Versuches

Schwingungen treten in ihren vielfältigen Formen in verschiedenen Bereichen der Naturwissenschaften auf. In den bisherigen Versuchen wurden Schwingungen idealisiert als konstant bzgl. der Amplitude und Periodendauer betrachtet. In diesem Versuch werden freie, freie gedämpfte und erzwungene Schwingungen am Beispiel eines Masse-Feder System untersucht. Bei der erzwungenen Schwingung werden Sie, wenn sich die Frequenz der erregenden Kraft der Eigenfrequenz des Systems annähern, eine deutliche Zunahme der Amplitude beobachten, die Sie in Form einer Resonanzkurve[1] analysieren sowie deren Phasenverhalten betrachten. Bei der digitalen Auswertung der Messwerte lernen Sie die Methode der Fast-Fourier-Transformation zur schnellen Analyse der Daten kennen.

[1] Resonanz ist ein wichtiges Konzept in der gesamten Physik und spielt z. B. in der Elektrizitätslehre (Schwingkreis, Senden und Empfangen von elektromagnetischen Wellen), der Optik (Laser) und der Atomphysik (Absorption und Emission von Licht) eine Rolle. Als Anwendung hat sich z. B. die Messmethode der Magnetresonanzspektroskopie (NMR, MRT) in der Chemie und Biologie etabliert.

Theoretischer Hintergrund

Die Differenzialgleichung (homogene, lineare DGL 2. Ordnung) für die freie ungedämpfte harmonische Schwingung (lineares Kraftgesetz!) eines Masse-Feder Systems

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + Dx = 0$$

m: Masse des schwingenden Massestücks, D: effektive Federkonstante des Systems

hat die allgemeine Lösung

$$x = \alpha \exp\left(i\omega_0 t\right) + \beta \exp\left(-i\omega_0 t\right)$$

mit der Eigenfrequenz ω_0 bzw. f_0 und der Schwingungsdauer

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad .$$

Die Differenzialgleichung für die gedämpfte harmonische Schwingung des Masse-Feder Sytems

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Dx = 0$$

Dabei ist $B\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ die geschwindigkeitsproportionale Kraft, die der Bewegung des Masse-Feder Systems entgegenwirkt (Dämpfung).

hat die allgemeine Lösung

$$x = \exp\left(-\frac{B}{2m}\,t\right)\left[\alpha \exp\left(\sqrt{\frac{B^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}\;t\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{\frac{B^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}\;t\right)\right] \quad .$$

Für den Fall schwacher Dämpfung $B^2 \leq 4Dm$ (und auch nur genau dann) ergibt sich:

$$x = \exp\left(-\frac{B}{2m}\,t\right)\left[\alpha \exp\left(i\omega_1 t\right) + \beta \exp\left(-i\omega_1 t\right)\right]$$

mit der Eigenfrequenz

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{B^2}{4m^2}} \quad . \tag{1}$$

Die Amplitude nimmt um den Faktor $\exp(-\frac{B}{2m}\,t)$ exponentiell mit der Zeit ab. Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplitudenwerte

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \exp\left(+\frac{B}{2m}\,T_1\right) = \exp\left(\delta T_1\right)$$

ist das Dämpfungsverhältnis. Der natürliche Logarithmus dieses Verhältnisses heißt logarithmisches Dekrement

$$\Lambda = \ln\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{B}{2m}\,T_1 = \delta T_1 \quad . \tag{2}$$

Abklingkonstante δ in 1/s

Die Differenzialgleichung (inhomogene, lineare DGL 2. Ordnung) für die erzwungene Schwingung des Masse-Feder Systems lautet

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Dx = F_0\cos\omega t$$

mit $F_0\cos\omega t$ als äußere antreibende Kraft infolge der periodischen Bewegung der unteren Befestigung des Masse-Feder Systems mit der Erregerfrequenz ω. Die Differenzialgleichung hat die partikuläre Lösung

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + B^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi) \quad ,$$

mit der Amplitude

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + B^2\omega^2}} \quad . \tag{3}$$

Die Phasenverschiebung φ ist gegeben durch

$$\tan\varphi = \frac{B\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)} \quad .$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch die Addition der partikulären Lösung und der Lösung der homogenen Differenzialgleichung zu

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + B^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi) + \exp\left(-\frac{B}{2m}\,t\right)\alpha\cos(\omega_1 t) \quad . \tag{4}$$

Beachten Sie die Unterscheidung zwischen den Kreisfrequenzen ω_0, ω_1 und ω.

Man sieht, dass sich die Schwingungen des angetriebenen und des ungestörten Systems zu Schwebungen überlagern. Nach einer Einschwingzeit verschwindet der letzte Term in Gl. (4) mit der Eigenfrequenz ω_1 aufgrund der exponentiellen Dämpfung und das System schwingt schließlich mit der Erregerfrequenz ω, wobei Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung von der Differenz $\omega_0^2 - \omega^2$ abhängen. Die Amplitude erreicht im ungedämpften Fall ($B = 0$) ein unendlich hohes Resonanzmaximum. Mit wachsender Dämpfung verschiebt sich das Maximum der Resonanzkurve zu kleineren Frequenzen. Die Phasendifferenz wächst vom Grenzwert Null für sehr langsame Schwingungen des Erregers $\omega \ll \omega_0$ über $\pi/2$ im Resonanzfall auf den Grenzwert π für sehr schnelle Schwingungen $\omega \gg \omega_0$.

Versuchsaufbau und -durchführung

Am Versuchsplatz finden Sie ein senkrecht ausgerichtetes Masse-Feder System aus zwei Federn, zwischen denen sich ein Massestück befindet, und einen Aluminiumzylinder der zur Dämpfung dient. Die obere Feder hängt mit dem oberen Ende an einem Kraftsensor. Das untere Ende der unteren Feder ist an einer Schubstange befestigt, die von einer Lautsprecherspule in periodische Bewegungen versetzt werden kann. Zusätzlich befindet sich auf dem Massestück ein Nd-Magnet. Schwingt das Massestück in dem Aluminiumzylinder, so werden durch den Magneten im Aluminiumzylinder Wirbelströme[2] induziert, die zu einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung der Schwingung des Masse-Feder Systems führen.

[2] Im Versuch E8 werden Sie detailliert die Wirbelstrombremse untersuchen.

Das Schwingungsverhalten des Systems wird mit Hilfe des Kraftsensors und des CASSY aufgezeichnet. Die vom Kraftmesser gemessene Kraft ist proportional zur Auslenkung des Massestücks aus seiner Ruhelage (hooksches Gesetz). Um Ihren Kraftmesser zu kalibrieren, ziehen Sie das Massestück mit der Hand um eine definierte Länge nach unten und notieren Sie diesen Wert.

Zur Untersuchung der erzwungenen Schwingungen ist die Lautsprecherspule, die die Schubstange bewegt, an einen Frequenzgenerator anzuschließen, bei dem die Frequenzen digital mit einer Genauigkeit von 0,001 Hz einstellbar sind. Für die Untersuchung des Phasenverhaltens sind sowohl die Schwingungfrequenz des Masse-Feder Systems als auch die Generatorfrequenz mit CASSY aufzuzeichnen. Beide Schwingungskurven haben die gleiche Frequenz, sind aber phasenverschoben zueinander.[3]

[3] Justieren Sie den Messaufbau so, dass Kraftsensor und Schubstange des Lautsprechers sich genau senkrecht gegenüber befinden da sonst Querschwingungen entstehen können.

Nach dem Ändern der Erregerfrequenz ω benötigt das Masse-Federsystem eine bestimmte Zeit zum Einschwingen (siehe Gl. (4)). Zeichnen Sie daher nach jedem Ändern der Erregerfrequenz etwa 60 (bis maximal 180) Sekunden lang den Einschwingvorgang auf, bis sich eine nahezu konstante Amplitude einstellt. Diese Amplitude ist dann abzulesen.[4] Lediglich einen einzelnen Einschwingvorgang sollten Sie auch ausdrucken und im Messprotokoll dokumentieren.

[4] Sie arbeiten genauer, wenn Sie den Spitze-Spitze-Wert ablesen und dann halbieren.

Aufgabenstellung für Physikstudierende (VF und ZF)

1. Die Eigenfrequenz ω_0 der freien Schwingung des Masse-Feder Systems ist zu bestimmen. Benutzen Sie dazu nach Aufnahme der Schwingungskurve die *FFT-Funktion*[5] und die Auswertefunktion *Peak-Schwerpunkt* von CASSY.

2. Nehmen Sie eine freie gedämpfte Schwingung auf. Bestimmen Sie deren Eigenfrequenz ω_1.

3. Für die freie gedämpfte Schwingungen ist das Phasendiagramm $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ über $x)$ aufzunehmen.[6]
   Dies ist eine Darstellung, mit dem das System, bis auf seine Masse, vollständig bestimmt ist. Wird anstelle der Geschwindigkeit, der Impuls dargestellt, so entspricht dies der Formulierung der Hamilton-Mechanik. Das Vorhandensein einer geschlossenen Ellipse im $p-x$-Phasenraum entspricht in dieser Formulierung einer periodischen Funktion, bei der die Energie

[5] FFT (Fast-Fourier-Transformation) ist eine Methode, die u. A. in der Signalanalyse der Naturwissenschaften angewendet wird. Sie basiert auf der mathematischen Methode der Fourier-Transformation, die es erlaubt, z. B. aus dem zeitlichen Verhalten eines periodisch veränderlichen Signals die Periode, bzw. Frequenz zu berechnen. FFT ist ein Computeralgorithmus, der zur schnellen Analyse solcher Daten angewendet wird.

[6] Der Kraftmesser ist vorher zu kalibrieren.

des Systems erhalten bleibt. Diskutieren Sie in der Auswertung das erstellte Phasendiagramm in Hinblick auf diese Information.

4. Das logarithmische Dekrement für die freie gedämpfte Schwingung ist zu bestimmen. Dazu trage man entweder $\ln x_n$ über der Zeit t auf und ermittle den Anstieg oder ermittle es aus einer Anpassung der Einhüllenden (Formel (2)).

5. Die Resonanzkurve der Amplitude des gedämpften Masse-Feder Systems ist aufzunehmen.
Stellen Sie vorweg am Frequenzgenerator eine Frequenz von 50 Hz ein und regeln Sie die Amplitude am Generator so, dass ca. 200 mA Wechselstrom fließen.[7]
Dazu sind die Maximalamplituden bei verschiedenen Erregerfrequenzen ω jeweils nach Abklingen des Einschwingvorgangs zu bestimmen.[8] Messen Sie in etwa 0,01 Hz-Schritten um ω_0. Im Bereich des Maximums ist entsprechend genauer in 0,002 Hz-Schritten zu messen. Vor jeder Messung mit neu eingestellter Erregerfrequenz ω ist das Masse-Feder System in seine Ruhelage zu bringen.[9] Fertigen Sie die grafischen Darstellungen für die Resonanzkurven bereits während der Versuchsdurchführung im Praktikum auf Millimeterpapier an![10]

6. Aus den Halbwertsbreiten einer Resonanzkurve (HWB $= 2\,\Delta\omega$) ist die Dämpfungskonstante δ zu bestimmen (es gilt $\Delta\omega \approx \delta\sqrt{3}$)[11] und mit der in Aufgabe 4 erhaltenen Dämpfungskonstante zu vergleichen.

7. Für die Resonanzkurve ist die Abhängigkeit der Phasenlage von ω aufzunehmen. Dazu zeichne man bereits bei Durchführung der Aufgabe 5 zusätzlich die Erregerfrequenz mit auf und vergleiche nach Beendigung des Einschwingvorgangs die Phasenlagen beider Schwingungskurven.

[7] Die Wechselstrommessung mit einem Multimeter ist erst ab einer Frequenz von 20-30 Hz genau.

[8] CASSY-Funktion

[9] Der Neustart aus der Ruheposition verkürzt den Einschwingvorgang.

[10] Nur so können Sie erkennen, ob die Anzahl Ihrer Messpunkte im Bereich der Resonanz ausreicht.

[11] Herleitung im Anhang

Aufgabenstellung für Nebenfachstudierende

1. Die Eigenfrequenz ω_0 der freien Schwingung des Masse-Feder Systems ist zu bestimmen. Benutzen Sie dazu nach Aufnahme der Schwingungskurve die *FFT-Funktion*[12] und die Auswertefunktion *Peak-Schwerpunkt* von CASSY.

2. Nehmen Sie eine freie gedämpfte Schwingung auf. Bestimmen Sie deren Eigenfrequenz ω_1.

3. Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante (Siehe Formel (2)) für die freie gedämpfte Schwingung. Dazu tragen Sie entweder $\ln x_n$ über der Zeit t auf und ermitteln daraus den Anstieg oder Sie ermitteln ihn aus einer Anpassung der Einhüllenden der Amplituden.

4. Die Resonanzkurve der Amplitude des gedämpften Masse-Feder Systems ist aufzunehmen.
Stellen Sie vorweg am Frequenzgenerator eine Frequenz von 50 Hz ein und regeln Sie die Amplitude am Generator so, dass ca. 200 mA Wechselstrom fließen.[13]
Dazu sind die Maximalamplituden bei verschiedenen Erregerfrequenzen

[12] FFT (Fast-Fourier-Transformation) ist eine Methode, die u. A. in der Signalanalyse der Naturwissenschaften angewendet wird. Sie basiert auf der mathematischen Methode der Fourier-Transformation, die es erlaubt, z. B. aus dem zeitlichen Verhalten eines periodisch veränderlichen Signals die Periode, bzw. Frequenz zu berechnen. FFT ist ein Computeralgorithmus, der zur schnellen Analyse solcher Daten angewendet wird.

[13] Die Wechselstrommessung mit einem Multimeter ist erst ab einer Frequenz von 20-30 Hz genau.

ω jeweils nach Abklingen des Einschwingvorgangs zu bestimmen.[14] Messen Sie in etwa 0,01 Hz-Schritten um ω_0. Im Bereich des Maximums ist entsprechend genauer in 0,002 Hz-Schritten zu messen. Vor jeder Messung mit neu eingestellter Erregerfrequenz ω ist das Masse-Feder System in seine Ruhelage zu bringen.[15] Fertigen Sie die grafischen Darstellungen für die Resonanzkurven bereits während der Versuchsdurchführung im Praktikum auf Millimeterpapier an![16]

5. Bestimmen Sie aus der Halbwertsbreite Ihrer aufgenommenen Resonanzkurve ($\mathrm{HWB} = 2\,\Delta\omega$) die Dämpfungskonstante δ (es gilt $\Delta\omega \approx \delta\sqrt{3}$)[17] und vergleichen Sie diese mit der in Aufgabe 3 erhaltenen Dämpfungskonstante.

[14] CASSY-Funktion

[15] Der Neustart aus der Ruheposition verkürzt den Einschwingvorgang.

[16] Nur so können Sie erkennen, ob die Anzahl Ihrer Messpunkte im Bereich der Resonanz ausreicht.

[17] Herleitung im Anhang

Anhang

Resonanzüberhöhung und Näherung für die Bandbreite (HWB) bei schwacher Dämpfung

Mit $\delta = B/2m$ aus Gl. (2) ergibt sich die Eigenfrequenz ω_1 für den Fall schwacher Dämpfung gemäß Gl. (1) zu

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad .$$

Für die Amplitude Gl. (3) gilt:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad . \tag{5}$$

Im statischen Grenzfall gilt für die Amplitude:

$$A(\omega = 0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \quad .$$

Für die Resonanzamplitude bei $\omega = \omega_1$ gilt:

$$A(\omega_1) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \approx \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\delta\omega_0} \quad . \tag{6}$$

Die Resonanzüberhöhung oder Güte wird definiert als:

$$Q = \frac{A(\omega_1)}{A(\omega = 0)} \approx \frac{\omega_0}{2\delta} \quad .$$

Bei den Kreisfrequenzen $\omega_{\pm 1/2}$ sei die Resonanzamplitude jeweils beidseitig auf die Hälfte abgefallen:

$$\frac{A(\omega_1)}{2} = A\left(\omega_{\pm 1/2}\right) \quad .$$

Nach (6) und (5) gilt dementsprechend

$$\frac{1}{4\delta\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{\pm 1/2}^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_{\pm 1/2}^2}} \quad .$$

Setzt man für die halbe Halbwertsbreite $\Delta\omega = \left|\omega_0 - \omega_{\pm 1/2}\right|$ und vergleicht die Quadrate der Nenner mit den Näherungen $\delta \ll \omega_0$ und $\Delta\omega \ll \omega_0$ so folgt:

$$16\delta^2\omega_0^2 = \left[(\omega_0 - \omega_{\pm 1/2})(\omega_0 + \omega_{\pm 1/2})\right]^2 + 4\delta^2\omega_0^2 = 4\Delta\omega^2\omega_0^2 + 4\delta^2\omega_0^2$$

bzw. $\Delta\omega = \delta\sqrt{3}$.